数理解析研究所講究録
38巻 1968年 1-28



# 常微分方程式と Factorial series について

京大 数理研 河野實彦

## §1. 序

Factorial series とは次の形の無限級数をいう。

(1) $$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\, n!}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

この級数は，収束領域として半平面 $\mathrm{Re}\, z > \alpha$ を持ち，任意の正の数 $\varepsilon > 0$ に対して，半平面 $\mathrm{Re}\, z > \alpha + \varepsilon$ では級数は一様収束する。

Factorial series は差分方程式の理論と関連づけられるが，一般には次の様な Laplace 積分による取扱いが行われる。積分路は実軸上にとり

(2) $$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} f(x)\, dx$$

前者の例としては，我々は reduced された微分方程式系 $t\dfrac{dX}{dt} = (A + tB)X$ の原点近傍における収束解の無限大での Behavior や，sector 内の Stokes 現象を調べる，いわゆる global 問題（接続問題）の研究において Factorial series

を，有効に使って来た。即ち，上の微分方程式系の収束解 $X_j(t) = t^{\rho_j} \sum_{m=0}^{\infty} G_j(m) t^m$ の係数 $G_j(m)$ が満足する差分方程式 $(\rho_j + m - A)\, G_j(m) = B\, G_j(m-1)$ の一般解として $F_j(m) = \sum_{s=0}^{\infty} H(s)\, g_j(m+s)$ を得た。ここで $g_j(m+s) = \dfrac{x^{m+s}\, \Gamma(\rho_j - a_{kk})}{\Gamma(m+s+\rho_j - a_{kk} + 1)}$ であり，$F_j(m)$ は収束する Factorial series である。

これらの研究については，参考文献 [1] [2] [3] [4] を見ていただきたい。

今日，紹介いたしますのは，微分方程式の特異点近傍における解を収束する Factorial series により展開しようとするものです。特異点近傍（特に不確定特異点）における解の Behavior を調べる際に，よく用いられた方法は漸近級数展開です。実際，次の様な結果がある。

<u>定理</u>　$A(x)$ は $n \times n$ 行列函数，$S$ は原点に頂点を持つ sector。今，$x \in S$，$|x| \geq x_0$ で $A(x)$ は正則であり

$$A(x) \simeq \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{-m} \qquad x \to \infty \quad \text{in } S$$

であれば，$S$ の任意の subsector に対して微分方程式

$$x^{-g} \frac{dY}{dx} = A(x)\, Y$$

の基本解は，次の構造を持つ。

$$Y(x) = \hat{Y}(x)\, x^{G} e^{Q(x)}$$

ここで，$p$ を正の整数とし，$Q(x)$ は $x^{\frac{1}{p}}$ の多項式，$G$ は定数行列 $\hat{Y}(x)$ は subsector で正則で，$x^{-\frac{1}{p}}$ の漸近級数を持つ。

ここでは この $\hat{Y}(x)$ を収束する Factorial series によって展開出来る場合を紹介する訳です。Factorial series が数値計算上からも、漸近級数よりは有力な方法であることは明らかです。常微分方程式と Factorial series の研究は、J. Horn に始まり Trjitzinsky, Turrittin によりなされていますが、ここでは Borel, Nörlund に基づき、含蓄のある J. Horn の一連の研究の中から 紹介して行きたい。尚、まとまった説明として Wasow Chapter XI があります。

§2. Laplace 積分と Factorial series の基本定理。

さて 収束性は考えずに Laplace 積分 (2) を調べてみると $f(x)$ を $x$ の巾級数で展開したものを (2) に代入し、項別積分すれば $F(z)$ は $z^{-1}$ の巾級数に展開される。しかし $e^{-x}=s$ の変換を行うと、積分は

$$(3)\qquad F(z)=\int_0^1 s^{z-1}\phi(s)\,ds\quad,\quad \phi(s)=f(\log s^{-1})$$

と表わされるから、この $\phi(s)$ を $s=1$，即ち $x=0$，で展開した級数

$$(4)\qquad \phi(s)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m(1-s)^m$$

を (3) に代入し 項別積分すれば、次の様な Factorial series 展開が得られるのである。

$$(5)\qquad F(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_m\, m!}{z(z+1)\cdots(z+m)}$$

1

即ち，任意の函数 $F(x)$ が Factorial series に展開されるためには，次の三つの条件があれば良い事がわかる。

(i) $F(z)$ が Laplace 積分により表わされる事。

(ii) $\varphi(s)$ が $|1-s|<1$ で正則である事。

(iii) (4) を (3) に代入した時，項別積分が許される事。

これから，上の三条件を満足するための $F(z)$ に対する条件や，Laplace 積分の基本定理等を調べて行こう。

定理 1（Laplace 積分表示の一意性）

(2) の形の Laplace 積分は半平面 $Re\, z > \alpha$ で収束する。しかも Laplace 積分表示は一意的である。

証明。Laplace 積分表示可能な函数 $F(z)$ は特別な class をなし，$\sin kz$ の様に等差数列をなす実根を無限にもつ函数はこの class に入らない。今，その様な函数 $\varphi(z)$ が Laplace 積分表示されたとする。$\varphi(z,x) = \int_0^x e^{-zt} f(t)\, dt$ とおき，$z_0$ を最初の零点，$h$ を公差とする。

$$\varphi(z_0+mh) = \int_0^\infty e^{-(z_0+mh)t} f(t)\, dt = mh\int_0^\infty e^{-mht}\varphi(z_0,t)\, dt = 0$$

最後の等式で，$e^{-ht} = x$ とおけば，$\int_0^1 x^{m-1}\varphi(z_0, -\frac{\log x}{h})\, dx = 0$，即ち，任意の正の整数 $p$ に対して $\int_0^1 t^p \varphi(t)\, dt = 0$ となり，$P(t)$ を多項式とすれば $\int_0^1 P(t)\varphi(t)\, dt = 0$ が成立つ。Weierstrass の多項式近似定理により，

$$\int_0^1 [\varphi(t)]^2 \, dt = 0$$

故に、$\varphi(t)$ は連続函数であるから $\varphi(t) \equiv 0$ $(0 \leqq t \leqq 1)$
を得る。これより Laplace 積分表示の一意性は明らか。

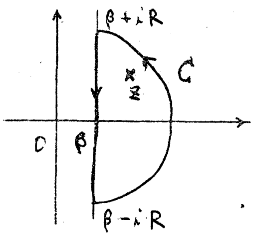
**定理2**（Laplace 積分表示可能定理）

函数 $F(z)$ が半平面 $\mathrm{Re}\, z \geqq \beta > 0$ で，正則で，次の形をしていれば Laplace 積分表示可能である。

(6) $$F(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{\mu(z)}{z^2}$$

ここで，$\mu(z)$ は上の半平面 $\mathrm{Re}\, z \geqq \beta$ で正則で有界である。

証明。




積分路 $C$ を図の様にとり，正方向に積分すれば

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(u)}{u - z} \, du$$

を得る。

$R \to \infty$ とすれば，円周上の積分は $0$ に収束し，

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{F(u)}{u - z} \, du$$

直線 $\mathrm{Re}\, u = \beta$ 上では $\mathrm{Re}\, u < \mathrm{Re}\, z$ より

$$\frac{1}{z - u} = \int_0^\infty e^{-x(z-u)} \, dx$$

これを上式に代入し，仮定(6)から積分の順序が交換出来て

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f(x) \, dx ,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} e^{ux} F(u) \, du$$

を得る。$e^{-x} = t$ の変換を行い整理すると

$$(7)\qquad F(z) = \int_0^1 t^{z-1} f(-\log t)\,dt = \int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)\,dt$$

$$(8)\qquad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} t^{-u} F(u)\,du$$

この定理から Factorial series で定義される函数は，この定理の条件を満足し，Laplace 積分表示可能な事がわかる。逆に，Laplace 積分 (7) において $\varphi(t)$ が $|1-t|<1$ で正則な函数であり，収束円周上での M. Hadamard の "Order" が有界であれば，Factorial series 展開出来る事を示そう。その前に M. Hadamard の "Order" について説明する。

<u>定義</u>（M. Hadamard の "Order"）

収束半径が 1 の巾級数で定義された函数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

の収束円周上での "Order" $K$ は次の様に定義される。

$$K = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|n a_n|}{\log n}$$

即ち，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，正の整数 $n_0$ が存在して $n>n_0$ のとき $|a_n| < n^{K-1+\varepsilon}$ が成立ち，一方全ての $n$ に対して $|a_n| > n^{K-1-\varepsilon}$ となる。

<u>定理 3</u>.（収束円周上の特異性）

巾級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の係数 $a_n$ が

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{K-1}} = 0 \qquad (K>0)$ を満たすとき，$f(z)$ は

$|z|<1$ で収束し, $z$ が円の内部から円周上の点へ近づくとき, 一様に $\lim_{|z|\to 1}(1-|z|)^K f(z)=0$ が成立つ。

証明。 $(1-z)^{-K}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(K+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(K)}z^n$ であり

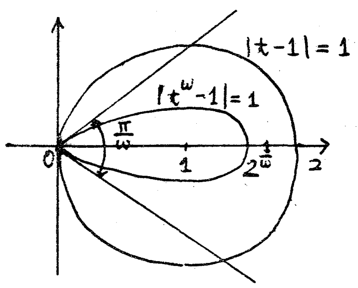
条件より $\lim_{n\to\infty}a_n\Big/\frac{\Gamma(K+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(K)}=0$ が成立つから.

任意の正の数 $\varepsilon$ に対して整数 $n_0$ が存在し, $n\geqq n_0$ では $|a_n|<\varepsilon\frac{\Gamma(K+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(K)}$ が成立つ。よって.

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty}a_nz^n\right|<\varepsilon\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\Gamma(K+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(K)}|z|^n<\varepsilon(1-|z|)^{-K}$$

これより $(1-|z|)^K|f(z)|<(1-|z|)^K\left|\sum_{n=0}^{n_0-1}a_nz^n\right|+\varepsilon$ 。

さて, 前にもどって $\varphi(t)$ が $|t-1|<1$ で正則函数とする。今, $\omega>1$ として, $t=\zeta^{\frac{1}{\omega}}$ の変換を行うと, 円周 $|\zeta-1|=1$ は閉曲線 $|t^{\omega}-1|=1$ に対応している。それを図示すれば, 下図の様になる。この図から $\varphi(\zeta^{\frac{1}{\omega}})$ は




円 $|\zeta-1|\leqq 1$ で原点を除けば円周を含めて, 正則な函数である事がわかる。それゆえ, 仮定をゆるめて, $\varphi(t)$ は原点に頂点を持ち, 実軸 $0\leqq t\leqq 1$ を含む sector 内で正則函数で, 非負の数 K が存在して, この sector 内部から $t\to 0$ のとき

一様に , $\lim_{t\to 0} t^K \varphi(t) = 0$ (収束円周上での"order")

が成立つならば $\omega$ を充分大きい正の数にとれば $\varphi(\zeta^{\frac{1}{\omega}})$ は

円 $|\zeta-1|\leq 1$ で正則になり, 円周上で有界な"order"を

持つ。 この条件により Laplace 積分

$$F(z) = \frac{1}{\omega}\int_0^1 \zeta^{\frac{z}{\omega}-1}\varphi(\zeta^{\frac{1}{\omega}})\,d\zeta$$

は項別積分が許され, 変数 $\frac{z}{\omega}$ の Factorial series に展開出来る。

$$(9)\qquad F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m\, m!\, \omega^m}{z(z+\omega)(z+2\omega)\cdots(z+m\omega)}$$

これは, 少なくとも 半平面 $R_e z > K$ で収束する。

よって, 次の定理を得た。

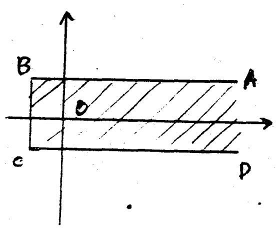
<u>定理4</u> (Factorial series 展開可能定理)

(I) $$F(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{\mu(z)}{z^2}$$

$\mu(z)$ は半平面 $R_e z \geq K > 0$ で, 正則有界な函数。

(II) $$(10)\qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{K-i\infty}^{K+i\infty} e^{xz} F(z)\,dz$$

で定義される函数 $f(x)$ は 帯状領域 ABCD で正則




で, この帯状領域の中で, 一様に

$\lim_{x\to\infty} e^{-Kx} f(x) = 0$ が成立つ。

ここで, 帯状領域 ABCD は 変換 $t = e^{-x}$ による $t$-平面の sector の $x$-平面への像である。

上の二つの条件 (I) (II) が満足されるならば，充分大きい $\omega$ をとれば，半平面 $R_e z \geq K > 0$ で．$F(z)$ は Factorial series (9) により展開出来る。

<u>定理 5</u>（Factorial series の漸近展開定理）

$F(z)$ が Factorial series (9) で定義された函数とすれば半平面 $R_e z \geq K$ で $\frac{1}{z}$ の漸近級数展開可能である。

証明。 (10) 式の右辺の $F(z)$ に

$$\frac{a_0}{z} + \frac{a_1 \omega}{z(z+\omega)} + \cdots + \frac{a_n\, n!\, \omega^n}{z(z+\omega)\cdots(z+n\omega)} + R_n(z)$$

を代入すると

$$f(x) = a_0 + a_1(1-e^{-\omega x}) + \cdots + a_n(1-e^{-\omega x})^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{K-i\infty}^{K+i\infty} e^{xz} R_n(z)\, dz$$

を得る。これを P-階微分すると

$$f^{(p)}(x) = \Pi_p(e^{-\omega x}) + \frac{1}{2\pi i}\int_{K-i\infty}^{K+i\infty} z^p e^{xz} R_n(z)\, dz \ , \quad (p<n)$$

$\Pi_p$ は定数項を含まない多項式。

ここで，$|z^{n+2}R_n(z)|$ は直線 $R_e z = K$ 上では有界であり，上の積分の絶対値は $Ce^{Kx}$ の上限を持つ。

よって，任意の $P$ に対して，$\varepsilon$ を任意の小さい正の数とすれば，

$$\lim_{x\to\infty} e^{-(K+\varepsilon)x} f^{(p)}(x) = 0 \qquad (p=0, 1, 2, \cdots)$$

これより，Laplace 積分 (2) を部分積分して

$$F(z) = \frac{f(0)}{z} + \frac{f'(0)}{z^2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^{n+1}}\int_0^\infty e^{-zx} f^{(n+1)}(x)\, dx$$

を得るが $|f^{(n+1)}(x)| < C e^{(X+\varepsilon)x}$ によって、最後の積分項

は $\dfrac{C\theta}{z^{n+1}(\mathrm{Re}\, z - X - \varepsilon)}$ （$|\theta| < 1$） となり、

$$F(z) = \frac{f(0)}{z} + \frac{f'(0)}{z^2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{z^{n+1}}\{1 + \eta_n\}$$

を得る。ここで $\eta_n$ は $z \to \infty$ のとき $0$ に収束する。

<u>定理 6</u>（Borel 函数の評価）

$\varphi(x)$ は $|x| \geqq R$ で収束する巾級数 $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}$ で表わされ、領域 $\mathrm{Re}(x^k e^{i\omega}) > X(\omega) \geqq 0$ で正則な函数とする。

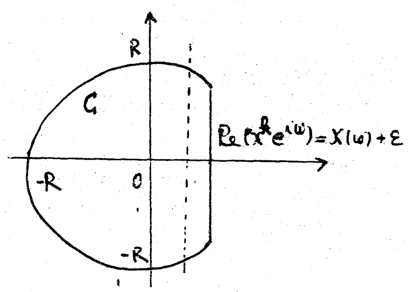
その時 $z=0$ を除けば絶対収束する級数

$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n z^{\frac{n}{k}-1}}{\Gamma(\frac{n}{k})}$ に対して、下の評価式が得られる。

$$(11) \qquad |\Phi(z)| < A e^{(X(\omega)+\varepsilon)|z|}$$

ここで定数 A は $\omega$ には無関係、$\varepsilon$ は任意の正の数。

証明。　左図の様な閉曲線 $C$ を考える。すると




$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(\xi)\xi^{n-1}\,d\xi$$

が成立ち、$\Phi(z)$ に代入する。

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(\xi)\xi^{n-1}\,d\xi\,\frac{z^{\frac{n}{k}-1}}{\Gamma(\frac{n}{k})}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{n-1} z^{\frac{n}{k}-1}}{\Gamma(\frac{n}{k})}\,d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \xi^{k-1}\varphi(\xi)\,F(\xi z^{\frac{n}{k}})\,d\xi$$

ただし　ここで

$$F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-k}}{\Gamma(\frac{n}{k})} = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{u^{-m}}{\Gamma(\frac{k-m}{k})} + E_{\frac{1}{k}}(u)$$

$E_{\frac{1}{k}}(u)$ は Mittag-Leffler 函数で $|u| \geqq \rho > 0$ に対して

$|E_{\frac{1}{k}}(u)| < C|e^{u^k}|$ の評価式が得られ，$F(u)$ に対して

$|F(u)| < De^{Re(u^k)}$ を得る。よって $z = |z|e^{i\omega}$, $|z| \geqq \gamma > 0$

に対して　$|F(\zeta z^{\frac{1}{k}})| < He^{|z| Re(\zeta^k e^{i\omega})}$ の評価式が得られる。ところが積分路 $C$ 上の点 $\zeta$ に対して

$Re(\zeta^k e^{i\omega}) \leqq \chi(\omega) + \varepsilon$ であるから，$|F(\zeta z^{\frac{1}{k}})| < He^{(\chi(\omega)+\varepsilon)|z|}$

しかも $|\zeta^{k-1}\varphi(\zeta)| < M$ である。今，閉曲線 $C$ の長さを $L$ で表わし，$MHL = 2\pi A$ とおけば

$$|\Phi(z)| < \frac{1}{2\pi} MH e^{(\chi(\omega)+\varepsilon)|z|} \cdot L$$

$$\therefore \quad |\Phi(z)| < A e^{(\chi(\omega)+\varepsilon)|z|}$$

**定理 7**　（Laplace 積分の積定理）

$$\varphi_1(z) = \int_0^{\infty} \Phi_1(x) e^{-zx} dx$$

$$\varphi_2(z) = \int_0^{\infty} \Phi_2(x) e^{-zx} dx$$

複素函数 $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ は $0 < x < \infty$ で連続で，$\sigma > \chi \geqq 0$ なる $\sigma$ に対して，正の定数 $g_1$, $g_2$, $K_1$, $K_2$ が存在して

$$|\Phi_1(x)| < K_1 x^{g_1-1} e^{\sigma x} \quad , |\Phi_2(x)| < K_2 x^{g_2-1} e^{\sigma x}$$

が成立てば，上の二つの Laplace 積分は半平面 $Re\, z > \chi$ で絶対収束する。そのとき，

(12) $$\varphi_1(z)\,\varphi_2(z) = \int_0^\infty e^{-zx}\,\Psi(x)\,dx \qquad \mathrm{Re}\,z > K$$

が成立つ。ここで $\Psi(x)$ は $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ の convolution で

(13) $$\Psi(x) = \int_0^x \Phi_1(t)\,\Phi_2(x-t)\,dt$$

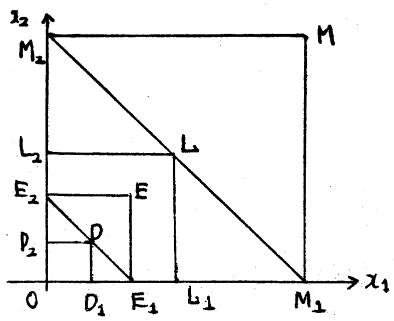
証明。 $$\varphi_1(z) = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \lambda\to\infty}} \int_\delta^{2\lambda} \Phi_1(x_1)\,e^{-zx_1}\,dx_1$$

$$\varphi_2(z) = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \lambda\to\infty}} \int_\delta^{2\lambda} \Phi_2(x_2)\,e^{-zx_2}\,dx_2$$

よって、$\varphi_1$, $\varphi_2$ の積は次の様な重積分の形に書ける。

(14) $$\varphi_1(z)\,\varphi_2(z) = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \lambda\to\infty}} \int_\delta^{2\lambda}\int_\delta^{2\lambda} \Phi_1(x_1)\,\Phi_2(x_2)\,e^{-z(x_1+x_2)}\,dx_1\,dx_2$$

下図において




$OD_1 = OD_2 = \delta$, $OE_1 = OE_2 = 2\delta$, $OL_1 = OL_2 = \lambda$, $OM_1 = OM_2 = 2\lambda$ $(2\delta < \lambda)$

先ず、平面 $DD_1M_1MM_2D_2D$ 上で、絶対収束する重積分は、$\delta\to 0$, $\lambda\to\infty$ のとき、平面 $E_1M_1M_2E_2E_1$ 上の重積分と同じ極限値に収束する事を示そう。何故ならば、それら重積分の差の絶対値は、三角形 $DD_1E_2$, $DD_2E_2$, $MM_1M_2$ 上での重積分 $\iint |\Phi_1(x_1)|\,|\Phi_2(x_2)|\,|e^{-z(x_1+x_2)}|\,dx_1\,dx_2$ の和より小さい。それは更に、平面 $DD_1E_1EE_2D_2D$, 平面 $LL_1M_1MM_2L_2L$ 上での上の重積分の和よりも小さい。

後者の重積分の和は　次の二つの重積分の差に等しい。

$$\int_{\delta}^{2\lambda} |\Phi_1(x_1)||e^{-zx_1}|\,dx_1 \int_{\delta}^{2\lambda} |\Phi_2(x_2)||e^{-zx_2}|\,dx_2$$

$$\int_{2\delta}^{\lambda} |\Phi_1(x_1)||e^{-zx_1}|\,dx_1 \int_{2\delta}^{\lambda} |\Phi_2(x_2)||e^{-zx_2}|\,dx_2$$

ところが，これらは $\lambda\to\infty$ のとき　0 に近づく。

上の説明において　$\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ の絶対収束性により

$$\left| \int_{\delta}^{\lambda}\int_{0}^{\delta} \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)e^{-z(x_1+x_2)}\,dx_1\,dx_2 \right|$$

$$\leqq \int_0^{\delta} |\Phi_1(x_1)e^{-zx_1}|\,dx_1 \int_{\delta}^{\lambda} |\Phi_2(x_2)e^{-zx_2}|\,dx_2 \to 0 \quad (\delta\to 0\ \ \lambda\to\infty)$$

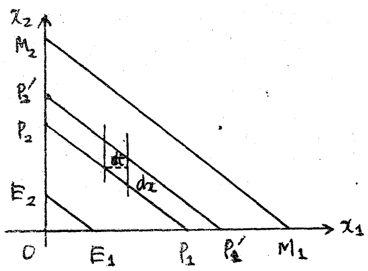
なる事を使った。

さて　平面 $E_1M_1M_2E_2E_1$ 上での重積分

$$\iint \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)e^{-z(x_1+x_2)}\,dx_1\,dx_2$$

を考えよう。

ここで，$x=x_1+x_2$，$t=x_1$　なる変数変換を行う。




左図で　$OP_1=OP_2=x$

$P_1P_1'=P_2P_2'=dx$　。すると上の重積分は

$$\int_{2\delta}^{2\lambda} e^{-zx}\,dx \int_0^{x} \Phi_1(t)\Phi_2(x-t)\,dt$$

故に

$$\varphi_1(z)\varphi_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx}\,dx \int_0^{x} \Phi_1(t)\Phi_2(x-t)\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-zx}\,\Phi(x)\,dx$$

これで　予備知識の説明を終えましたので　表題の「微分方程式と Factorial series」の説明に移ります。

## §3　常微分方程式の解の factorial series 展開。

この章では常微分方程式の不確定特異点近傍の解が収束する factorial series に展開出来る事を示そう。

$x=\infty$ に rank $k$ の不確定特異点を持つ次の単独線型常微分方程式を考える。

$$(A)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + x^{k-1} P_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + x^{2(k-1)} P_2(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + x^{m(k-1)} P_m(x)\, y = 0$$

ここで、係数 $P_\mu(x) = a_\mu + \dfrac{\bar{a}_\mu^{(1)}}{x} + \dfrac{\bar{a}_\mu^{(2)}}{x^2} + \cdots \qquad (\mu = 1, 2, \ldots m)$

は $x=\infty$ の近傍で正則な函数である。

この方程式は簡単な変数変換により、次の形に reduce される。

$$(B)\quad \frac{d^m y}{dx^m} + P_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_m(x)\, y = 0$$

ここで、係数 $P_\mu(x)$ は $x^{-\frac{1}{k}}$ の巾級数で展開される。

$$P_\mu(x) = a_\mu + \frac{a_\mu^{(1)}}{x^{\frac{1}{k}}} + \frac{a_\mu^{(2)}}{x^{\frac{2}{k}}} + \cdots\cdots \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m)$$

以下、方程式 (B) を考察する事にする。

方程式 (B) の特性方程式は $\alpha^m + a_1\alpha^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\alpha + a_m = 0$

となり、この特性根は相異なると仮定する。

その時、方程式 (B) は $m$ つの形式解を持ち次の形を有す。

$$y(x) = e^{\alpha x + \alpha^{(1)} x^{\frac{k-1}{k}} + \cdots + \alpha^{(k-1)} x^{\frac{1}{k}}} \cdot x^{-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{-\frac{n}{k}}$$

その形式解の一つは 変換 $y = e^{\alpha x + \alpha^{(1)} x^{\frac{k-1}{k}} + \cdots + \alpha^{(k-1)} x^{\frac{1}{k}}} z$ によって $z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n / x^{\gamma + \frac{n}{k}}$ の形をなすとして良い。即ち 特性根が $0$ であり、方程式 (B) において、$a_m = 0$, $a_m^{(1)} = 0, \dots a_m^{(k-1)} = 0$ と仮定する事が出来る。

もし $a_{m-1} \neq 0$ であれば $\gamma = \dfrac{a_m^{(k)}}{a_{m-1}}$ で与えられる。そして、$\gamma$ の実部 $\bar{\gamma}$ は正と仮定しても良い。何故ならば、それは $y = x^{g} z$ の変換により 達せられる。

さて、今 常微分方程式に Laplace 積分をほどこす。

$$y(x) = \int_0^{\infty} v(z)\, e^{zx}\, dz$$

積分路はある直線 $\arg z = \omega$ にとり、積分の収束性を仮定し、Laplace 変換の積定理（定理 7）を使えば、形式的に常微分方程式 (B) は $v(z)$ に関する次の積分方程式に reduce される。

$$\text{(C)} \quad (z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z)\, v(z)$$

$$= \int_0^{z} \sum_{\mu=1}^{m} G_\mu(z-\zeta)\, \zeta^{m-\mu}\, v(\zeta)\, d\zeta$$

ここで $G_\mu(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \dfrac{a_\mu^{(\lambda)}\, (-z)^{\frac{\lambda}{k}-1}}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{k}\right)}$ $\quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$

これを Borel 函数といい、$z=0$ を除き 絶対収束する級数である。Borel 函数の評価（定理 6）より、

$P_\mu(x)$ $(\mu=1,2,\ldots,m)$ が 領域 $R_e(xe^{i\omega}) > \sigma(\omega) \geqq 0$ で正則であれば

$$|G_\mu(z)| < A e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|z|}$$

を得る。

さて、積分方程式(C)を逐次近似法で解こう。そのために

$$F(z,\zeta) = \frac{\sum_{\mu=1}^{m} G_\mu(z-\zeta)\,\zeta^{m-\mu}}{z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-1}}$$

とおくと、積分方程式は

$$z\,u(z) = \int_0^z F(z,\zeta)\,u(\zeta)\,d\zeta$$

更に、

$$H(z,\zeta) = F(z,\zeta) - \gamma = F(z,\zeta) - \frac{a_m^{(k)}}{a_{m-1}}$$

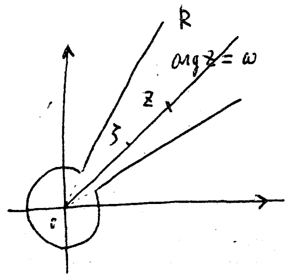
$$= H_1(z,\zeta) + H_2(z,\zeta)$$

と分割する。

$$H_1(z,\zeta) = \frac{(z-\zeta)^{\frac{1}{k}-1}\,\zeta \sum_{\mu=1}^{m-1}\left[\frac{a_\mu^{(1)}}{\Gamma(\frac{1}{k})} + \frac{a_\mu^{(2)}}{\Gamma(\frac{2}{k})}(\zeta-z)^{\frac{1}{k}} + \cdots\right]\zeta^{m-\mu-1}}{z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-1}}$$

$$H_2(z,\zeta) = \frac{a_m^{(k)} + \frac{a_m^{(k+1)}}{\Gamma(1+\frac{1}{k})}(\zeta-z)^{\frac{1}{k}} + \cdots}{z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-1}} - \frac{a_m^{(k)}}{a_{m-1}}$$

$$= \frac{a_{m-1}\left[\frac{a_m^{(k+1)}}{\Gamma(1+\frac{1}{k})}(\zeta-z)^{\frac{1}{k}} + \cdots\right] - a_m^{(k)}\left(z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-2}z\right)}{a_{m-1}\left(z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-1}\right)}$$




領域Rとして 左図の如くとり，Rの内部にも，境界上にも

$z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-1}$ の零点を含まぬ様にする。 $z$がRに属し，$\zeta$が直線 $0..z$ 上にあれば， $|\zeta|\leqq|z|$， $|z-\zeta|=|z|-|\zeta|\leqq|z|$ が成立ち 次の評価式を得る。

$$|H_1(z,\zeta)| < L\,(|z|-|\zeta|)^{\frac{1}{k}-1}|z|$$

$$|H_2(z,\zeta)| < M\,|z|^{\frac{1}{k}}$$

$$|H(z,\zeta)| < L\,(|z|-|\zeta|)^{\frac{1}{k}-1}|z| + M\,|z|^{\frac{1}{k}}$$

L，M，は定数である。

そこで，積分方程式

$$z\,v(z) = \int_0^z (\gamma + H(z,\zeta))\,v(\zeta)\,d\zeta$$

を微分して，次の関係式を得る。

$$\begin{cases} z\dfrac{dv(z)}{dz} = (\gamma-1)\,v(z) + \dfrac{dV}{dz} \\[2ex] V = \displaystyle\int_0^z H(z,\zeta)\,v(\zeta)\,d\zeta \end{cases}$$

最初の式より $v(z) = C z^{\gamma-1} + z^{\gamma-1}\displaystyle\int_0^z z^{-\gamma}\frac{dV}{dz}\,dz$

を得るが，これを更に部分積分する事により 結局 次の積分方程式系になる。

$$\begin{cases} v(z) = C z^{\gamma-1} + z^{-1}V(z) + \gamma z^{\gamma-1}\displaystyle\int_0^z z^{-\gamma-1}V(z)\,dz \end{cases}$$

$$\overline{V}(z) = \int_0^z H(z,\zeta)\, v(\zeta)\, d\zeta$$

この積分方程式系を逐次近似法で解く。

$$\begin{cases} v_0(z) \equiv c\, z^{\gamma-1} \\ \overline{V}_{\nu-1}(z) = \int_0^z H(z,\zeta)\, v_{\nu-1}(\zeta)\, d\zeta \\ v_\nu(z) = z^{-1}\, \overline{V}_{\nu-1}(z) + \gamma\, z^{\gamma-1} \int_0^z z^{-\gamma-1}\, \overline{V}_{\nu-1}(z)\, dz \end{cases}$$

領域Rの中では、$f, f'$ を定数として $|z^\gamma| \leqq f|z|^{\bar{\gamma}}$,
$|z^{-\gamma}| \leqq f'|z|^{-\bar{\gamma}}$ である事に注意して、先ず、

$$|v_0(z)| \leqq c_0\, |z|^{\bar{\gamma}-1}$$

今、 $|v_{\nu-1}(z)| \leqq C_{\nu-1}\, |z|^{\bar{\gamma}+\frac{\nu-1}{k}-1}$ と仮定すると

$$|\overline{V}_{\nu-1}(z)| \leqq C_{\nu-1} \int_0^{|z|} \left\{ L\,(|z|-|\zeta|)^{\frac{1}{k}-1}\, |z| + M\, |z|^{\frac{1}{k}} \right\} |\zeta|^{\bar{\gamma}+\frac{\nu-1}{k}-1}\, d|\zeta|$$

$$= C_{\nu-1}\, L\, |z|^{\bar{\gamma}+\frac{\nu}{k}}\, \frac{\Gamma(\frac{1}{k})\,\Gamma(\bar{\gamma}+\frac{\nu-1}{k})}{\Gamma(\bar{\gamma}+\frac{\nu}{k})}$$

$$+ C_{\nu-1}\, M\, \frac{|z|^{\bar{\gamma}+\frac{\nu}{k}}}{\bar{\gamma}+\frac{\nu-1}{k}}$$

$$= C_{\nu-1}\, Q_{\nu-1}\, |z|^{\bar{\gamma}+\frac{\nu}{k}}$$

すると、

$$|v_\nu(z)| \leqq C_{\nu-1}\, G_{\nu-1}\, |z|^{\bar{\gamma}+\frac{\nu}{k}-1} \left(1 + \frac{|\gamma|k + f'}{\nu}\right)$$

ゆえに $C_\nu = C_{\nu-1}\, Q_{\nu-1} \left(1+\dfrac{|\gamma| k f f'}{\nu}\right)$

$$\frac{C_\nu}{C_{\nu-1}} = \left[ L\, \frac{\Gamma(\frac{1}{k})\,\Gamma(\bar{\gamma}+\frac{\nu-1}{k})}{\Gamma(\bar{\gamma}+\frac{\nu}{k})} + M\, \frac{1}{\bar{\gamma}+\frac{\nu-1}{k}} \right]\left(1+\frac{|\gamma| k f f'}{\nu}\right)$$

$$\therefore \lim_{\nu\to\infty} \frac{C_\nu}{C_{\nu-1}} = 0$$

よって，級数 $\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{-\gamma+1} v_\nu(z)$ は領域Rで広義絶対一様収束する。今 $v(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_\nu(z)$ とおくと，この函数は $z^{\gamma-1}$ と領域Rで $z^{\frac{1}{k}}$ に関して正則な函数との積であり，しかも積分方程式(C)を満足する。

さて，次にこの $v(z)$ が exponential type である事を示そう。$C$ を充分大きい定数とし，$h > \sigma(\omega)$ に対して

$$|v(z)| < C e^{h|z|}$$

が成立つ。この評価式は $z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-1}$ の零点を含まぬ直線 $\arg z = \omega$ 上で成立つ。

$|z| \leqq R$ では $|v(z)| < C e^{h|z|}$ であるが，もし $|z| = R'$ のとき $|v(z)| = C e^{h|z|}$ となったとする。

$|z| = R'$ の時，積分方程式(C)と Borel 函数 $G_\mu(z-\zeta)$ の評価式 $|G_\mu(z-\zeta)| < A e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)(|z|-|\zeta|)}$ を使って，

$$|z||v(z)| \leqq \int_0^{|z|} \frac{\sum_{\mu=1}^{m} |G_\mu(z-\zeta)|\,|\zeta|^{m-\mu}}{|z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-1}|}\, |v(\zeta)|\, d|\zeta|$$

$$|z|\,C\,e^{k|z|} \leqq AC\,\frac{|z|^{m-1}+|z|^{m-2}+\cdots+|z|+1}{|z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-1}|}\,e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|z|}\int_0^{|z|} e^{(k-\sigma(\omega)-\varepsilon)|\zeta|}\,d|\zeta|$$

$$\leqq AC\,\frac{|z|^{m-1}+\cdots+|z|+1}{|z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-1}|}\,e^{(\sigma(\omega)+\varepsilon)|z|}\,\frac{e^{(k-\sigma(\omega)-\varepsilon)|z|}}{k-\sigma(\omega)-\varepsilon}$$

$$\therefore\quad 1 \leqq \frac{1}{|z|}\,\frac{A}{k-\sigma(\omega)-\varepsilon}\,\frac{|z|^{m-1}+|z|^{m-2}+\cdots+|z|+1}{|z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{n-1}|}$$

右辺は $|z|$ が充分大きいとき 0 に近づき矛盾する。ゆえに $v(z)$ が exponential type である事がわかった。

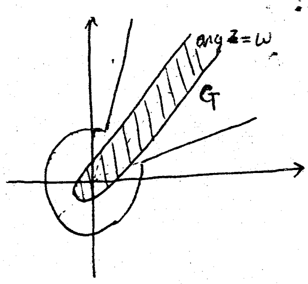
この事から、直線 $\arg z=\omega$ 上での Laplace 積分

$$y(x)=\int_0^\infty v(z)\,e^{zx}\,dz$$

が、領域 $\mathrm{Re}(xe^{i\omega})+\sigma(\omega)<0$ で絶対収束し、$y(x)$ が微分方程式(B)の解となる事が証明された訳である。

さて、本論の factorial series 展開に移ろう。

先ず、変数変換 $z=\frac{1}{\kappa}\log t$, $t=e^{\kappa z}$ を考える。ここで $|\kappa|=\gamma$, $\kappa=\gamma e^{i(\pi-\omega)}=-\gamma e^{-i\omega}$




この変換により、$t$-平面上の円 $|t-1|\leqq 1$ は $z$-平面上のある領域 $G$（左図）に移される。$\gamma$ を充分大きくとる事によって、領域 $G$ には

$z^{m-1}+a_1 z^{m-2}+\cdots+a_{m-1}$ の零点は含まれない様に出来る。

その時，

$$\varphi(t)=v\left(\frac{1}{k}\log t\right)=\sum_{n=0}^{\infty} B_n (1-t)^{\gamma+\frac{n}{k}-1}$$

は $|t-1|<1$ で収束する。

$t=0$ は $z$－平面の $\arg z=\omega$ 上での $z\to\infty$ に対応し

$t=0$ での $\varphi(t)$ の特異性は $v(z)$ に対する評価式より

$$|\varphi(t)|<D\,|t|^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-\varepsilon}$$

を得る。（定理4．定理3 参照）

これから係数 $B_n$ に対する次の評価式を得る事が出来る。

$$|B_n|<K\frac{\Gamma\left(n+\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon\right)}=K\left\{n^{\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\}$$

ここで $K$ は $n$ に depend しない定数。

この証明は Hadamard の order の証明に対応するものである。

$$\psi(t)=t^{\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon-1}(1-t)^{\gamma}\varphi(t)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(1-t)^{\frac{n}{k}}$$

は $|t-1|<1$ で $(1-t)^{\frac{1}{k}}$ の正則な函数である。

今，$0<\rho<1$ とし，$\rho\leqq|t-1|\leqq1$ に対して

$D\,|(1-t)^{1-\gamma}|<Q$ とすれば．

$$|\psi(t)| < D|(1-t)^{1-\gamma}|\,|t|^{\varepsilon-1} < Q\,|t|^{\varepsilon-1}$$

が成立つ。

また $|t-1|<\rho$ に対して $|\psi(t)|$ はある有界な上限 E より小さい。$2^{1-\varepsilon}E<Q$ とすれば，$|t|<2$ より

$$|\psi(t)| < Q\,|t|^{\varepsilon-1}$$

が成立つ。結局 $|\psi(t)| < Q\,|t|^{\varepsilon-1}$ となる。

さて $u=(1-t)^{\frac{1}{k}}$，$t=1-u^k$ とおけば

$$\psi(t) = \chi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n u^n$$

そして

$$K_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi(e^{i\theta})\,e^{-in\theta}\,d\theta$$

$$|K_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\chi(e^{i\theta})|\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\psi(1-e^{ik\theta})|\,d\theta < \frac{Q}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |1-e^{ik\theta}|^{\varepsilon-1}\,d\theta$$

$$= \frac{Q}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|2\sin\frac{k\theta}{2}\right|^{\varepsilon-1} d\theta = K$$

K は有界で $n$ に depend しない定数。

さて $\varphi(t)$ に戻って $\varphi(t) = t^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-2\varepsilon+1}(1-t)^{\gamma-1}\psi(t)$

$\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon = \alpha$ とおくと

$$t^{-\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-2\varepsilon+1} = (1-(1-t))^{1-\alpha}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha-1+n)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha-1)}\,(1-t)^{n}$$

よって.

$$B_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+\nu-1)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\alpha-1)} K_{n-\nu}$$

が成立つ。

$$|B_n| < K \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+\nu-1)}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\alpha-1)} = K \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha)}$$

$$= K \frac{\Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+n)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon)}$$

この係数の評価式により、我々の目的の factorial series 展開を得るのであるが、そのための次の定理をあげておく。

<u>定理</u>　級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ ($b$ は任意で有界) で一様収束し $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\infty} |f_n(x)|\,dx$ が収束するならば、項別積分が許されて

$$\int_a^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{\infty} f_n(x)\,dx$$

が成立つ。

係数 $B_n$ の評価式を利用して　級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |B_n| \int_0^1 (1-t)^{\bar{r}+\frac{n}{k}-1}\, t^{Re(\frac{x}{k})-1}\,dt$$

が収束する事を示そう。

$$S_n = |B_n| \int_0^1 (1-t)^{\bar{r}+\frac{n}{k}-1} \; t^{Re(\frac{x}{k})-1} \, dt$$

$$< \frac{K\,\Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+n)\;\Gamma(\bar{r}+\frac{n}{k})\;\Gamma(Re(\frac{x}{k}))}{\Gamma(n+1)\;\Gamma(Re(\frac{x}{k})+\bar{r}+\frac{n}{k})\;\Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon)}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon+n)}{\Gamma(n+1)} = n^{\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\frac{\Gamma(\bar{r}+\frac{n}{k})}{\Gamma(Re(\frac{x}{k})+\bar{r}+\frac{n}{k})} = \left(\frac{n}{k}\right)^{-Re(\frac{x}{k})}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\therefore\; S_n < \frac{K\,\Gamma(Re(\frac{x}{k}))\,k^{Re(\frac{x}{k})}}{\Gamma(\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon)}\, n^{\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon-Re(\frac{x}{k})-1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

よって，上の級数が収束するためには

$$\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+2\varepsilon-Re\left(\frac{x}{k}\right) < 0$$

であれば良い。　$\varepsilon$ は任意の小さい数であるから，

$$\frac{\sigma(\omega)}{\gamma}-Re\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{\sigma(\omega)}{\gamma}+\frac{Re(x e^{i\omega})}{\gamma} < 0$$

$$\therefore\; Re(x e^{i\omega}) + \sigma(\omega) < 0$$

に対して，級数は収束する。

この事から　上の定理により項別積分が許されて．

$Re\ (xe^{i\omega}) + \sigma(\omega) < 0$　のとき．

$$y(x) = -\frac{1}{k}\int_0^1 \varphi(t)\, t^{\frac{x}{k}-1}\, dt$$

$$= -\frac{1}{k}\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} B_n (1-t)^{\gamma+\frac{n}{k}-1}\, t^{\frac{x}{k}-1}\, dt$$

$$= -\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_0^1 (1-t)^{\gamma+\frac{n}{k}-1}\, t^{\frac{x}{k}-1}\, dt$$

$$= -\frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\Gamma(\gamma+\frac{n}{k})\,\Gamma(\frac{x}{k})}{\Gamma(\gamma+\frac{n}{k}+\frac{x}{k})}$$

これで．微分方程式(B)の解の factorial series 展開式が得られた。

## REFERENCES


(1) K. Okubo, A connection problem involving a logarithmic function, Pub. of R.I.M.S., 1, no.1 (1965) 99-128

(2) M. Iwano & K. Okubo, On a set of convergent solutions for a system of second order linear difference equations, Pub. of R.I.S.M., 1, no.2 (1966) 205-210.

(3) M. Kohno, A two points connection problem involving logarithmic polynomials, Pub. of R.I.M.S., 2, no.2 (1966)

(4) M. Kohno, The condition of the convergence of the series $\sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) g_i^k(m+s)$ and the determination of Stokes' multipliers, to appear.

(5) E. Borel, Leçons sur les séries divergents, Paris (1928)

(6) N. E. Norlund, Leçons sur les séries d'interpolation, Paris (1926).

(7) J. Horn, Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. 71 (1911), 510-532.

(8) ———, Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichungen erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitstelle, Jour. f. Math. 143 (1913) 212-240.

(9) ———, Laplaceshe Integrale als Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen. Jour. f. Math. 144 (1914) 167-1[illegible] 151 (1921) 167-199.

(10) ———, Laplaceshe Integrale als Lösungen von Funktionen-gleichungen, Jour. f. Math. 146 (1915) 95-115.

(11) ———, Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen, Jahres. d. D. Math. Ver. 24 (1915) 210-225.

(12) ———, Integration linearer Differentialgleichungen durch Laplaceshe Integrale und Fakultätenreihen, Jahresber. d. D. Math. 24 (1915) 309-329, Jahresber. d. D. Math. 24 (1916) 74-83.

(13) ———, Verallgemeinerte Laplaceshe Integrale als Lösungen linearer und nichtlinearer Differentialgleichungen, Jahres. D. Math. 25 (1916/17) 301-325.

(14) ———, Über eine nichtlineare Differenzengleichung. Jahres. 26 (1917) 230-251.

(15) ———, Zur Theorie der nichtlinearen Differenzengleichung Math. Zeit. 1 (1918) 80-114.

(16) J. Horn, Singuläre Systeme linearer Volterrasher Integralgleichungen. Math. Zeit. 3 (1919) 265-313.

(17) ——— , Laplaceshe Integrale und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen und Volterrashen Integralgleichungen. Math. Zeit. 8 (1920) 100-114.

(18) ——— , Zur Theorie der nichtlinearen Differentialgleichungen. Math. Zeit. 13(1922) 263-282.

(19) ——— , Laplaceshe Integrale, Binomialkoeffizientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Math. Zeit. 21 (1924) 85-95.

(20) ——— , Integration linearer Differentialgleichungen. durch Laplacesche Integrale I,II, Math. Zeit. 49 (1944) 339-350, 684-701.

(21) W. J. Trjitzinsky, Laplace integrals and factorial series in the theory of linear differential and difference equations, Trans. Am. Math. Soc. 37 (1935) 80-146.

(22) W. J. Turrittin, Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, Acta Math., 93 (1955) 27-66

(23) D. V. Widder; The Laplace transform, Princeton, (1941)

(24) W. Wasow, Asymptotic expansions for ordinary differential equations. Interscience. 1966.

(25) Whittaker & Watson, Modern Analysis. Cambridge.